

UMA MOTIVAÇÃO PARA O ESTUDO DA DERIVADA FRACA.

Eduard Toon, Simone Mazzini Bruschi.

Exatas - Matemática - Departamento de Matemática – Instituto de Geociências e Ciências Exatas – Campus de Rio Claro – e-mail: edu_toon@yahoo.com.br, sbruschi@rc.unesp.br

ABSTRACT

Neste trabalho estudamos conceitos de derivada fraca. Este conceito é motivado pela necessidade de solucionar problemas físicos (por exemplo, vibração da corda) que não podem ser resolvidos com os conceitos da derivada de Newton-Leibniz.

Desenvolvimento do texto

Analisaremos o problema das vibrações de uma corda elástica de comprimento L . Consideramos um sistema de coordenadas cartesianas ortogonais uOx e a corda esticada ao longo do eixo x , de modo que sua origem seja $(0,0)$ e seu extremo $(0,L)$. Obteremos uma equação cuja solução descreve os movimentos da corda, após uma perturbação em seu estado de repouso. Supomos que o movimento efetua-se sempre em um plano, na direção vertical, isto é, deformações horizontais não são consideradas, e também que a corda esteja presa em $(0,0)$ e $(0,L)$.

Consideremos que na posição de repouso a corda é representada por C_0 , e após um tempo t , ela ocupa no plano onde vibra uma posição $C(t)$ que é a curva a qual se supõe de equação $u = u(x, t)$, com $0 < x < L$ e $0 < t < T$.

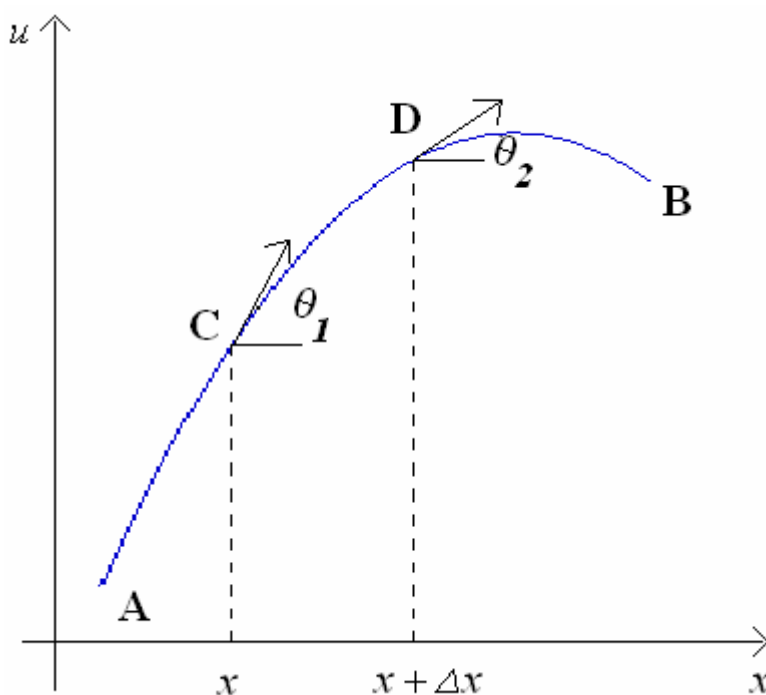


Fig.1 – Representação da perturbação da corda

O arco AB é a parte da posição $C(t)$ no instante t . Supõe-se a tensão constante representada por γ e que a única força atuando é $\vec{\gamma}$, cujo módulo é γ . Considera-se um segmento Δx da corda em repouso C_0 que deformou-se em Δs na configuração $C(t)$. Supõe-se que são pequenas as deformações de modo que $\Delta x \approx \Delta s$. Os vetores na figura anterior indicam a tensão em A e em B, possuindo a direção da tangente em D e direção oposta em C. Se θ_1 é o ângulo da tangente em C e θ_2 o ângulo da tangente em D a curva $C(t)$, obtém-se para a resultante da tensão:

$$F = \gamma \operatorname{sen} \theta_2 - \gamma \operatorname{sen} \theta_1$$

Por hipótese, esta é a única força atuando sobre a corda e então pela segunda lei de Newton temos que F é igual à massa de $\Delta x \approx \Delta s$ multiplicada pela aceleração do movimento. Sendo ρ a densidade constante do material da corda, a massa de $\Delta x \approx \Delta s$ será $\rho \Delta x$ e temos também que $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ é a aceleração. Portanto:

$$(1) \quad \rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma \operatorname{sen} \theta_2 - \gamma \operatorname{sen} \theta_1$$

Como as vibrações são pequenas, podemos considerar que $\operatorname{sen} \theta_2$ e $\operatorname{sen} \theta_1$ diferem pouco da $\operatorname{tg} \theta_2$ e $\operatorname{tg} \theta_1$ respectivamente. Pela interpretação geométrica da derivada, têm-se:

$$\operatorname{tg} \theta_1 = u_x(x) \quad \text{e} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = u_x(x + \Delta x),$$

então

$$\operatorname{sen} \theta_1 \approx \operatorname{tg} \theta_1 = u_x(x); \quad \operatorname{sen} \theta_2 \approx \operatorname{tg} \theta_2 = u_x(x + \Delta x).$$

Logo podemos escrever o segundo membro de (1) em função de u , obtendo:

$$\rho \Delta x \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \gamma [u_x(x + \Delta x) - u_x(x)].$$

Supondo-se que u possua derivadas contínuas em $Q = [0, L] \times [0, T]$ até segunda ordem, dividindo-se a expressão anterior por Δx e fazendo-se Δx tender a zero, obtém-se:

$$(2) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{sendo} \quad \alpha^2 = \frac{\gamma}{\rho}, \quad (x, t) \text{ em } Q$$

cujas solução $u = u(x, t)$, $u : R^2 \rightarrow R$ de classe C^2 descreve os movimentos da corda, após uma perturbação de seu estado de repouso. Considerando-se $u_0(x) = u(x, 0)$ de classe C^2 e $u_1(x) = u_t(x, 0)$ de classe C^1 , respectivamente a configuração e velocidade iniciais, sabe-se que o método de d'Alembert nos dá como solução do problema a função:

$$(3) \quad u(x, t) = \frac{1}{2} [u_0(x + \alpha t) + u_0(x - \alpha t)] + \frac{1}{2\alpha} \int_{x-\alpha t}^{x+\alpha t} u_1(s) ds$$

definida no retângulo Q .

Existem situações físicas em que as condições de regularidade sobre $u_0(x)$ não são verificadas. Por exemplo, suponhamos que perturbou-se a corda puxando em um de seus pontos com uma pinça e soltando a seguir.

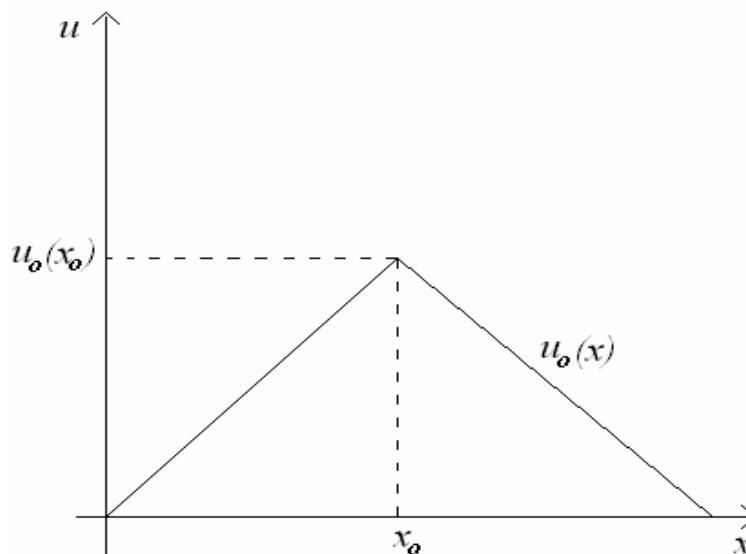


Fig. 2 – Perturbação da corda puxando o ponto $u_0(x)$ com uma pinça

Observamos que neste caso $u_0(x)$ não é derivável em $(0,L)$ e portanto a expressão dada em (3) não é uma solução para (2), pois não é derivável. Para resolvermos este novo caso, consideramos as funções teste em Q . As funções teste $\phi: Q \rightarrow R$ que possuem derivadas de todas as ordens em Q e de modo que exista um conjunto limitado e fechado K contido em Q , tal que $\phi(x,t) = 0$ para todo (x,t) em Q tal que (x,t) não pertence a K . O conjunto das funções teste em Q será denotado por $C_0^\infty(Q)$. O conjunto $C_0^\infty(Q)$ é não vazio, qualquer que seja o conjunto aberto Q . Multiplicaremos ambos os membros de (2) por uma função ϕ pertencente a $C_0^\infty(Q)$ obtendo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \phi(x,t) = \alpha^2 \phi(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Integrando por partes em Q obtém-se:

$$\frac{\partial u}{\partial t} \phi(x,t) \Big|_{t=0}^{t=T} - \int_0^T \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt = \alpha^2 \frac{\partial u}{\partial x} \phi(x,t) \Big|_{x=0}^{x=L} - \alpha^2 \int_0^T \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt$$

Como ϕ é função teste, $\phi(x,T) = \phi(x,0) = \phi(L,t) = \phi(0,t) = 0$ e então

$$(4) \quad - \int_0^T \int_0^L \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt = + \alpha^2 \int_0^T \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt = 0.$$

Toda solução de (2) será solução de (4), não valendo a volta.

Observemos que em (2) exige-se a existência das derivadas de segunda ordem de $u(x,t)$, fazendo sentido as integrais de (4). Este fato motivou definir o problema de vibrações da corda elástica, como uma função satisfazendo (4) para toda função $\phi \in C_0^\infty(Q)$. Estende-se a noção de derivada de Newton-Leibniz, obtendo o conceito da derivada fraca ou generalizada, com o qual a condição inicial não derivável é aceitável, ou seja, consideremos uma função $g: R \rightarrow R$, $g(x)$ integrável em R . Segundo S. Sobolev dizemos que $g(x)$ possui derivada fraca ou generalizada em R , quando existe uma função $h(x)$ integrável em todo subconjunto compacto de R , satisfazendo:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) \phi(x) dx, \quad \forall \phi \in C_0^\infty(Q).$$

A função $h(x)$ denomina-se derivada fraca ou generalizada de $g(x)$.

Observamos que se $g(x)$ for derivável segundo Newton-Leibniz, então $g(x)$ será derivável segundo Sobolev, pois:

Seja $g(x)$ derivável e $\phi \in C_0^\infty(Q)$ então:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi'(x) dx = g(x) \phi(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) \phi(x) dx.$$

Como ϕ é teste temos que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \phi'(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} g'(x) \phi(x) dx.$$

A função $h(x) = g'(x)$ e portanto $g(x)$ é derivável segundo Sobolev. Não vale a recíproca como mostra o seguinte exemplo.

Considere $g(x) = |x|$, $x \in R$.

A derivada fraca de $g(x)$ é uma $h(x)$ integrável em todo fechado limitado de R tal que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \phi(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} |x| \phi'(x) dx$$

para toda função teste ϕ em R .

Como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 -x \varphi'(x) dx + \int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx.$$

Calculando separadamente temos que (integrando por partes):

$$\int_{-\infty}^0 -x \varphi'(x) dx = -x \varphi(x) \Big|_{x=-\infty}^{x=0} + \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx.$$

Como $\varphi(x)$ é teste em R obtém-se:

$$-\int_{-\infty}^0 x \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx.$$

Analogamente (integrando por partes):

$$\int_0^{\infty} x \varphi'(x) dx = x \varphi(x) \Big|_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx = -\int_0^{\infty} \varphi(x) dx.$$

Portanto:

$$-\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = -\left[\int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx - \int_0^{\infty} \varphi(x) dx \right] = \int_{-\infty}^0 -1 \varphi(x) dx + \int_0^{\infty} 1 \varphi(x) dx.$$

A função sinal

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} +1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

é integrável em todo subconjunto fechado e limitado de R e satisfaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sign}(x) \varphi(x) dx$$

para toda função φ teste de R .

Conclui-se que $\text{sign}(x)$ é a derivada fraca de $|x|$.

Podemos proceder da mesma forma e verificar que $\text{sign}(x)$ não possui derivada fraca, ou seja, a noção de derivada fraca idealizada por S. Sobolev é muito útil, mas ainda é restrita.

Agradecimentos

Paulo Mendes de Carvalho Neto (co-autor)

Referências Bibliográficas

MEDEIROS, A. Luiz. **Iniciação aos Espaços de Sobolev e Aplicações**. Instituto de Matemática-UFRJ, 1983.

BRUSCHI, M. Simone. **Relatório de Iniciação Científica entregue à FAPESP**. Março a agosto/93